Capitolo 7 – Algebra Lineare

7.1 – Vettori

7.1.1 - Richiami di geometria analitica

- ***Coordinate cartesiane in uno spazio a 3 dimensioni*** S_3

In S_3 *si considerino tre rette perpendicolari, aventi in comune un punto (**origine**); su ciascuna delle tre rette (**assi cartesiani ortogonali**) si fissi un **verso positivo** e **un'unità di misura** per le lunghezze. Operando in questo modo si costruisce un **riferimento cartesiano ortogonale nello spazio**: esso sarà detto **monometrico**, se sui tre assi si considera la stessa unità di misura. Mediante tale riferimento cartesiano si stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali, detti coordinate del punto e denominati rispettivamente **ascissa**, **ordinata e quota**.*

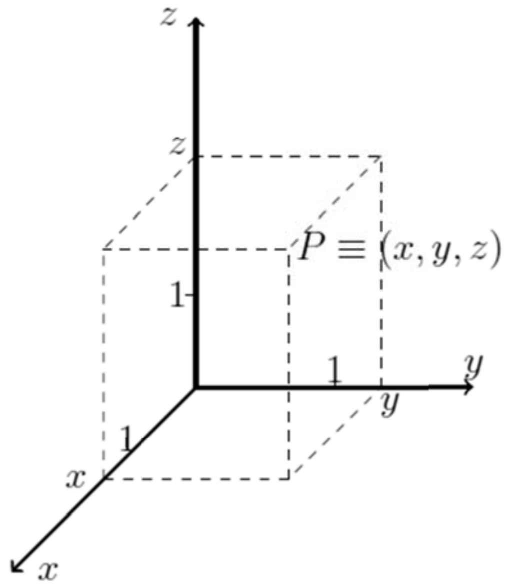
*Gli assi cartesiani ortogonali individuano tre piani ortogonali, che dividono lo spazio in otto **ottanti**. Valgono le seguenti note:*

i punti dell'asse delle ascisse hanno ordinata e quota nulle,

i punti dell'asse delle ordinate hanno ascissa e quota nulle,

i punti dell'asse delle quote hanno ascissa e ordinata nulle,

l'origine ha coordinate nulle,



Dati due punti $\boldsymbol{P_1}$ *e* $\boldsymbol{P_2}$*, considerate le loro coordinate cartesiane*

<7.1.1/1> $\boldsymbol{P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)\,,\ P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)}$

la distanza tra i due punti risulta

<7.1.1/2> $$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

<u>Esempio</u>: Distanza tra due punti in coordinate cartesiane

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{P_1} \equiv (2,2,2) \\ \boldsymbol{P_2} \equiv (5,6,14) \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

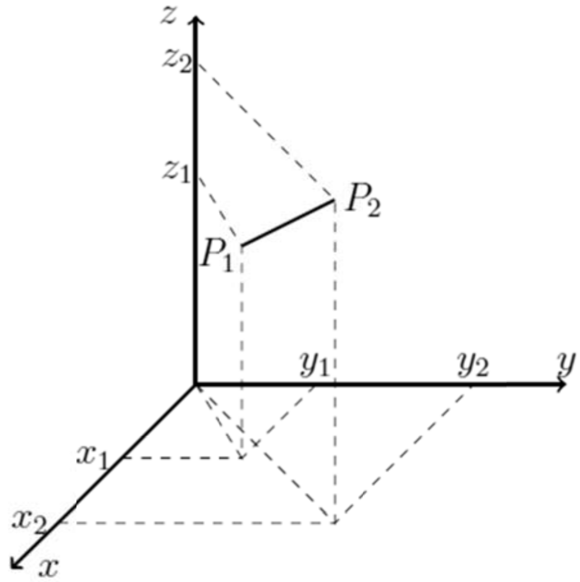
Se il punto $\boldsymbol{P_2}$ *coincide con l'origine* $(0,0,0)$*, risulta*

<7.7.1/3> $$\boldsymbol{d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

e la ***distanza*** *di* $\boldsymbol{P_1}$ *dall'origine, che si indica con* $|\boldsymbol{P_1}|$ *, si chiama* ***modulo*** *o* ***lunghezza*** *del segmento avente per estremi l'origine e il punto* $\boldsymbol{P_1}$ *.*

Se i due punti $\boldsymbol{P_1}$ *e* $\boldsymbol{P_2}$ *hanno due coordinate uguali, risulta rispettivamente*

<7.7.1/4> $$\boldsymbol{d = |z_1 - z_2| \ , \ d = |y_1 - y_2| \ , \ d = |x_1 - x_2|}$$



Il ***piano*** *è il luogo dei punti allineati a tre punti assegnati. Le coordinate* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{z}$ *dei punti di un piano sono legate da una relazione di tipo lineare del tipo:*

<7.7.1/5> $$\boldsymbol{\underbrace{\underbrace{a}_{\neq 0} x + \underbrace{b}_{\neq 0} y + \underbrace{c}_{\neq 0}}_{e/o} z + d = 0}$$

Le coordinate dei punti di incontro di due piani identificano l'equazione di una ***retta.*** *Tali coordinate si ottengono risolvendo il sistema composto dalle equazioni delle due piani interessati*

<7.7.1/6> $$\boldsymbol{\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}}$$

Le coordinate dei punti di incontro di tre piani identificano l'equazione di un **punto.** *Tali coordinate si ottengono risolvendo il sistema composto dalle equazioni dei tre piani interessati*

<7.7.1/7>
$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} \\ \boldsymbol{a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0} \end{cases}$$

- ***Coordinate cartesiane in uno spazio ad m dimensioni*** $\boldsymbol{S_m}$

In $\boldsymbol{S_m}$ *si considerino n rette perpendicolari, aventi in comune un punto (**origine**); su ciascuna delle m rette (**assi cartesiani ortogonali**) si fissi un **verso positivo** e **un'unità di misura** per le lunghezze. Operando in questo modo si costruisce un **riferimento cartesiano ortogonale** in* $\boldsymbol{S_m}$*: sarà **monometrico**, se sugli m assi si considera la stessa unità di misura. Mediante tale riferimento cartesiano si stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra i punti dello spazio e le m-ple ordinate di numeri reali, detti coordinate del punto e denominati rispettivamente **prima, seconda, terza, …, m-sima coordinata.***

Dati due punti $\boldsymbol{P}$ *e* $\boldsymbol{Q}$ *, considerate le loro coordinate cartesiane*

<7.1.1/8> $\boldsymbol{P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)}$, $\boldsymbol{Q \equiv (y_1, y_2, \dots, y_m)}$

la distanza tra i due punti risulta

<7.1.1/9>

$$\boldsymbol{d = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}}$$

e se in particolare il punto $\boldsymbol{Q}$ *coincide con l'origine* $(0,0,\ldots,0)$ *si ha la* ***distanza*** *del punto* $\boldsymbol{P}$ *dall'origine, che si indica con* $|\boldsymbol{P}|$ *ovvero la* ***lunghezza*** *del segmento che congiunge l'origine con l'estremo* $\boldsymbol{P}$ *o anche il* ***modulo*** *del segmento*

<7.7.1/10>

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$$

7.1.2 – Segmenti orientati, vettori e spazi vettoriali

- ***Segmento orientato in*** $\boldsymbol{S_m}$

Un segmento orientato è un segmento caratterizzato da:

modulo *(lunghezza del segmento, cioè distanza tra gli estremi)*

direzione *(direzione della retta sulla quale giace il segmento)*

verso *(verso positivo di percorrenza della retta)*

- ***Vettore*** $\overline{\boldsymbol{a}}$ *(definizione geometrica)*

classe di equivalenza *dei segmenti orientati in* $\boldsymbol{S_m}$ *, aventi cioè lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso:*

> *in* $\boldsymbol{S_m}$ *esistono* $\infty^{\boldsymbol{m}}$ *vettori distinti, ciascuno composto da* $\infty^{\boldsymbol{m}}$ *segmenti orientati equivalenti*
>
> *ciascun vettore può essere rappresentato da un qualsiasi segmento orientato della classe di equivalenza: di norma si*

sceglie il segmento orientato della classe avente per ***punto di applicazione*** *l'origine di* $\boldsymbol{S_m}$

- ***<u>Vettore nullo</u>*** $\overline{\mathbf{0}}$ *è il vettore caratterizzato da:*

  modulo nullo

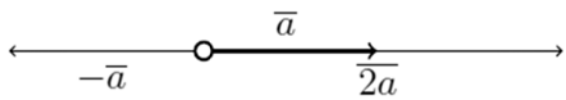
  direzione indeterminata

  verso indeterminato

- ***<u>Prodotto di un vettore per un numero reale</u>***

<7.1.2/1> $$\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{c}\,\overline{\boldsymbol{a}}$$

$$\begin{cases} c = 0 \;\Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{b}} = 0\,\bar{a} = \overline{\mathbf{0}} \\ c = \begin{cases} 1 \;\Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{b}} = 1\,\bar{a} = \overline{\boldsymbol{a}} \\ -1 \Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{b}} = -1\,\bar{a} = -\overline{\boldsymbol{a}} \end{cases} \\ c \neq 0, |1| \begin{cases} direzione\ di\ \overline{\boldsymbol{b}} = direzione\ di\ \overline{\boldsymbol{a}} \\ \left.\begin{matrix} c > 0 \\ c < 0 \end{matrix}\right\} verso\ di\ \overline{\boldsymbol{b}} \left\{\begin{matrix} uguale \\ contrario \end{matrix}\right\} verso\ di\ \overline{\boldsymbol{a}} \\ modulo\ di\ \overline{\boldsymbol{b}} = |\boldsymbol{c}|\ modulo\ di\ \overline{\boldsymbol{a}} \end{cases} \end{cases}$$



- ***<u>Somma di due vettori aventi la stessa direzione</u>***

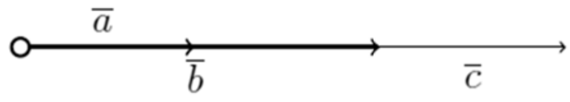
<7.1.2/2> $$\overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}$$

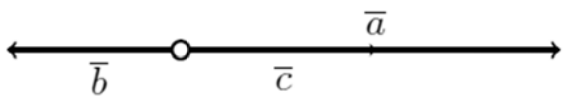
$direzione\ di\ \overline{\boldsymbol{c}} = direzione\ di\ \overline{\boldsymbol{a}}\ e\ di\ \overline{\boldsymbol{b}}$

$$verso\ di\ \bar{\boldsymbol{c}} = verso\ del\ vettore\ con\ modulo\ maggiore$$

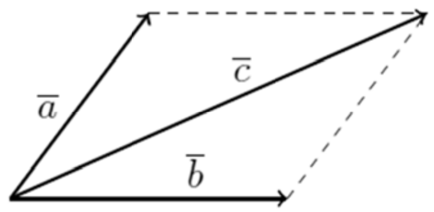
$$modulo\ di\ \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{Bmatrix} somma \\ differenza \end{Bmatrix} tra\ modulo\ maggiore\ e$$

$$modulo\ minore\ per\ versi\ \begin{Bmatrix} concordi \\ discordi \end{Bmatrix}\ di\ \bar{\boldsymbol{a}}\ e\ \bar{\boldsymbol{b}}$$





- ***<u>Somma di due vettori aventi diversa direzione</u>***
  (Regola del parallelogramma)



Le operazioni precedenti godono della seguenti proprietà:

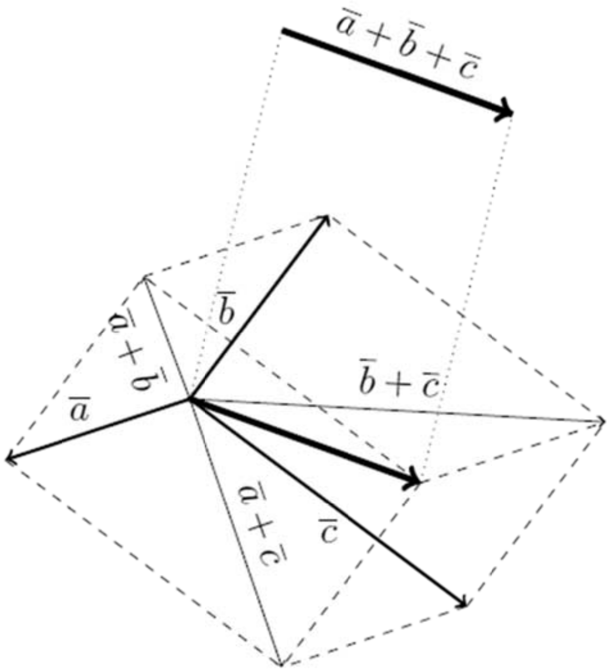
commutativa $\quad \bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}}$

associativa $\quad (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}) + \bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}} + (\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}}) = (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{c}}) + \bar{\boldsymbol{b}}$

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{a}\,(\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})$$

distributiva $\quad \boldsymbol{c}\,(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{c}\,\bar{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{c}\,\bar{\boldsymbol{b}}$

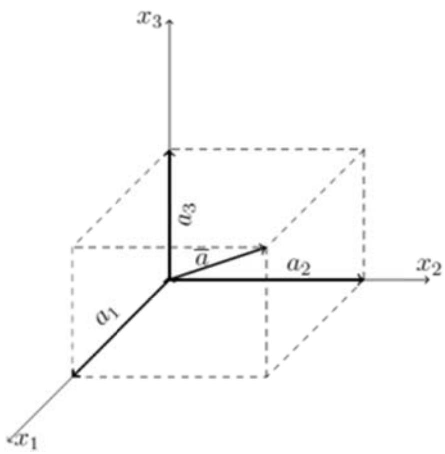
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{a}\,\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{b}\,\bar{\boldsymbol{c}}$$



- ***<u>Vettore</u>* $\overline{a}$** *(definizione algebrica)*

Un vettore in $\boldsymbol{S_m}$ *può essere rappresentato tramite la **m-pla ordinata di numeri reali** corrispondenti alle coordinate del punto terminale del segmento orientato applicato nell'origine (**rappresentante** della classe di equivalenza costituente il vettore). Tali coordinate del punto terminale sono definite **componenti del vettore*** $\overline{a}$

<7.1.2/3> $$\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$



Risulta immediatamente

- ***Vettore uguali***

<7.1.2/4> $$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow (\underbrace{\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{b_k}}_{\boldsymbol{k=1,2,\dots,m}})$$

- ***Vettore nullo*** $\overline{\mathbf{0}}$ *(vettore con componenti tutte nulle)*

<7.1.2/5> $$\overline{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$$

- ***Prodotto di un vettore per un numero reale***

<7.1.2/6> $$\boldsymbol{c}\,\overline{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{ca_1}, \boldsymbol{ca_2}, \dots, \boldsymbol{ca_m})$$

- ***Somma di due vettori*** *(con stessa o diversa direzione)*

<7.1.2/7> $$(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{a_m} + \boldsymbol{b_m})$$

Esempi: Operazione su vettori

$$2 \cdot (1, 0, -2) = (2, 0, -4)$$

$$(1, 0, -2) + (-2,3,2) = (-1,3, 0)$$

- ***Prodotto scalare di due vettori***

<7.1.2/8>

$$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_k b_k} = \boldsymbol{a_1 b_1} + \boldsymbol{a_2 b_2} + \cdots + \boldsymbol{a_m b_m}$$

Esempi: *Prodotti scalari di due vettori*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\boldsymbol{a}} = (1,0,-2) \\ \overline{\boldsymbol{b}} = (3,-1,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \ \overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k = -1$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\boldsymbol{a}} = (1,0,-2) \\ \overline{\boldsymbol{b}} = (0,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \ \overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k = 0$$

$$\overline{\boldsymbol{a}} = (1,0,-2) \ \Rightarrow \ \overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{a}} = \sum_{k=1}^{3} a_k^2 = 5$$

- ***Combinazione lineare di vettori***

Dati $\boldsymbol{n}$ *vettori di uno spazio* $\boldsymbol{S_m}$

<7.1.2/9> $$\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{j}} = \left(\boldsymbol{a_{1j}}, \boldsymbol{a_{2j}}, \dots, \boldsymbol{a_{mj}}\right) \ , \ \ j = 1,2,\dots,n$$

$$\begin{array}{c}\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ \dots \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\end{array}$$

ed $\boldsymbol{n}$ *numeri reali*

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

la combinazione lineare degli $\boldsymbol{n}$ *vettori è il vettore definito nel modo seguente*

<7.1.2/10>

$$\overline{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{x_j} = \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{x_1} + \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{x_2} + \dots + \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_n}$$

*La **relazione vettoriale** sopraindicata equivale ad **m relazioni scalari***

<7.1.2/11>

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{11}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{12}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}} \\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{21}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{22}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{2n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{2}} \\ \cdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m1}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m2}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}} \end{cases}$$

ossia, in modo compatto,

<7.1.2/12>

$$\sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}} \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{m}$$

<u>Esempio</u>: Combinazione lineare di vettori

$\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} = (3,2,1,0)$, $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} = (2,0,-3,1)$, $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{3}} = (-1,3,0,-1)$
$\bar{\boldsymbol{x}} = (2,3,5)$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}}x_1 + \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}}x_2 + \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{3}}x_3 = \bar{\boldsymbol{b}}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 7 = b_1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 19 = b_2 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = -7 = b_3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = -2 = b_4 \end{cases} \Rightarrow \ \bar{\boldsymbol{b}} \equiv (7,19,-7,-2)$$

Il problema inverso relativo alla combinazione lineare di vettori è il seguente:

- *supponendo noti gli n vettori assegnati e l'ulteriore vettore, risultato della combinazione lineare,*

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{j}} = \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\right) \quad , \quad j = 1,2, \dots, n \\ \overline{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \end{cases}$$

*il problema consiste nell'accertare l'esistenza degli **n** numeri reali (e l'eventuale loro ricerca) che soddisfino la relazione vettoriale (e quindi il sistema delle equivalenti relazioni scalari)*

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Operando in questo modo, l'insieme delle relazioni scalari rappresenta il sistema di m equazioni lineari, in cui gli n numeri reali rappresentano le incognite, le componenti dei vettori rappresentano rispettivamente i coefficienti delle incognite e i termini noti.

<u>Esempio</u>: Risoluzione del problema inverso

$$\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} = (1,2,3,-1) \ , \ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} = (2,-1,-1,1) \ , \ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{3}} = (-1,2,3,-1)$$
$$\overline{\boldsymbol{b}} = (2,9,-2,1)$$

$$\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} x_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} x_2 + \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{3}} x_3 = \overline{\boldsymbol{b}}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ \overline{\boldsymbol{x}} \equiv (-5,11,15)$$

- ***<u>Spazio vettoriale</u>*** $\boldsymbol{S_m}$

L'insieme dei vettori di $\boldsymbol{S_m}$ *costituisce uno **spazio vettoriale** se:*

- *tra i vettori è definita l'operazione di* ***somma****, ovvero la somma di elementi/vettori dell'insieme è ancora un elemento/ vettore dell'insieme: si dice che l'****insieme di vettori*** *è* ***chiuso*** *rispetto a tale operazione*

- *il* ***vettore nullo*** *appartiene all'insieme*

- *ogni* ***vettore*** *ammette* ***opposto***

- *l'****insieme dei vettori*** *è* ***chiuso*** *rispetto ad una definita operazione di prodotto tra vettori e numeri reali ovvero ogni* ***combinazione lineare*** *di vettori è ancora un vettore appartenente all'insieme*

La ***dimensione*** *di uno spazio vettoriale è data dal* ***numero*** *delle* ***componenti*** *dei suoi elementi/vettori*

7.1.3 - Dipendenza e indipendenza lineare di vettori

Dati $\boldsymbol{n}$ *vettori di uno spazio* $\boldsymbol{S_m}$ *ed* $\boldsymbol{n}$ *numeri reali e considerata l'equazione vettoriale relativa alla loro combinazione lineare uguagliata al vettore nullo*

<7.1.3/1>

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{0}$$

equivalente al sistema di equazioni scalari

<7.1.3/2>

$$\begin{cases} \boldsymbol{\overline{a}_1 \cdot \overline{x} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0} \\ \boldsymbol{\overline{a}_2 \cdot \overline{x} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0} \\ ----------------- \\ \boldsymbol{\overline{a}_m \cdot \overline{x} = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0} \end{cases}$$

*se l'equazione vettoriale è verificata **soltanto** dal vettore nullo, gli **n** vettori risultano **linearmente indipendenti***

*se l'equazione vettoriale è verificata **anche** da vettori diversi da quello nullo, gli **n** vettori risultano **linearmente dipendenti** e **almeno** uno di essi è esprimibile come combinazione lineare degli altri n-1 vettori*

<7.1.3/3>

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{0},\ \ x_j \neq 0 \Longrightarrow \overline{a}_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \overline{a}_j \frac{x_j}{x_k}}$$

<u>Nota</u>: Il vettore nullo (singolarmente considerato) è linearmente dipendente

$$\boldsymbol{\overline{0}}\, x_1 = \boldsymbol{\overline{0}}\ \textit{anche se}\ \ x_1 \neq 0$$

*<u>Nota</u>: **n** vettori, comprendenti il vettore nullo, sono linearmente dipendenti*

$$\boldsymbol{\overline{0}}\, x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \boldsymbol{\overline{a}_j} x_j = \boldsymbol{\overline{0}}\ \ \textit{anche se}\ \ x_k \neq 0$$

*In uno spazio vettoriale di dimensione **n** ci sono al massimo **n** vettori linearmente indipendenti.*

***Una base** (**una** e non **la** base**,** in quanto essa **non è unica**), di uno spazio vettoriale di dimensione $\boldsymbol{n}$ è un insieme di **vettori linearmente indipendenti** (detti **generatori**): tale ultima proprietà indica che ogni (altro) vettore dello spazio può essere ottenuto come combinazione lineare dei vettori della base: una base di uno spazio vettoriale è costituita da un numero di vettori linearmente indipendenti esattamente pari alla dimensione dello spazio.*

*Un numero di vettori inferiore a $\boldsymbol{n}$ può comunque generare un suo **sottospazio vettoriale**, mentre un numero di vettori superiore a $\boldsymbol{n}$ può generare tutto lo spazio, ma tali vettori non possono essere linearmente indipendenti.*

<u>Esempio</u>: Lineare dipendenza/indipendenza di vettori
I tre versori (vettori unitari, con una sola componente unitaria e le altre componenti nulle, di modulo uno) sono linearmente indipendenti:

$$\bar{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} \equiv (1,0,0) \ , \ \ \bar{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}} \equiv (0,1,0) \ , \ \ \bar{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{3}} \equiv (0,0,1)$$

$$\sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} x_j = \bar{\mathbf{0}} \quad solo\ se \quad \bar{x} = \bar{0}$$

*I tre vettori dell'esempio di cui sopra costituiscono una **base canonica** per uno spazio vettoriale di dimensione 3*

<u>Esempi:</u> Spazi vettoriali reali

dimensione 1: la retta $\mathbb{R}$

dimensione 2: il piano cartesiano $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$

dimensione 3: lo spazio $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

.... dimensione n: lo spazio $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

<u>Esempio</u>: I tre vettori seguenti sono linearmente dipendenti

$$\overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}} = (2,3,5) \ , \ \overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}} = (-1,2,3) \ , \ \overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{3}} = (3,1,2)$$

infatti

$$\sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{j}} x_j = \overline{\mathbf{0}} \quad \textit{anche per} \ \overline{\boldsymbol{x}} = (1,-1,-1)$$

$$1 \cdot \bar{a}_1 - 1 \cdot \bar{a}_2 - 1 \cdot \bar{a}_3 = \bar{0} \ \Rightarrow \ \bar{a}_1 = \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

$$(2,3,5) = (-1,2,3) + (3,1,2)$$

7.1.4 - <u>Rango di un insieme di vettori</u>

*Dati **n** vettori di uno spazio* $\boldsymbol{S_m}$ *, il rango **p** dell'insieme di tali vettori corrisponde al massimo numero di vettori linearmente indipendenti estraibili dall'insieme.*

p = n *gli **n** vettori sono linearmente indipendenti*

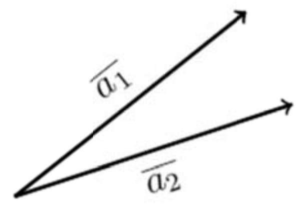
p < n *gli **n** vettori sono linearmente dipendenti, esiste però una p-pla di vettori linearmente indipendenti (**base dello spazio di dimensione p**), tramite i quali è possibile esprimere, come combinazione lineare, ognuno degli ulteriori **n-p** vettori dell'insieme. L'insieme dei vettori della base individuano uno spazio* $\boldsymbol{S_p}$ *(sottospazio di* $\boldsymbol{S_m}$*)*

<7.1.4/1> $$S_p \subset S_m \Rightarrow \begin{Bmatrix} p \le m \\ p \le n \end{Bmatrix} \Rightarrow 0 \le p \le min(m, n)$$

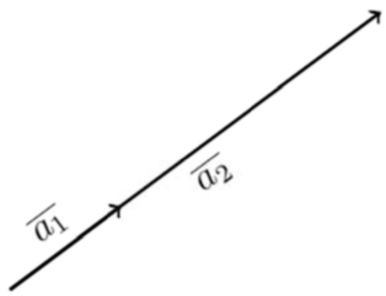
Nota: In uno spazio S_m, n (>m) vettori sono sempre linearmente dipendenti.

Esempio: Dati due vettori $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ entrambi $\neq 0$

*se **p=2** i due vettori risultano linearmente indipendenti e individuano uno spazio S_2*

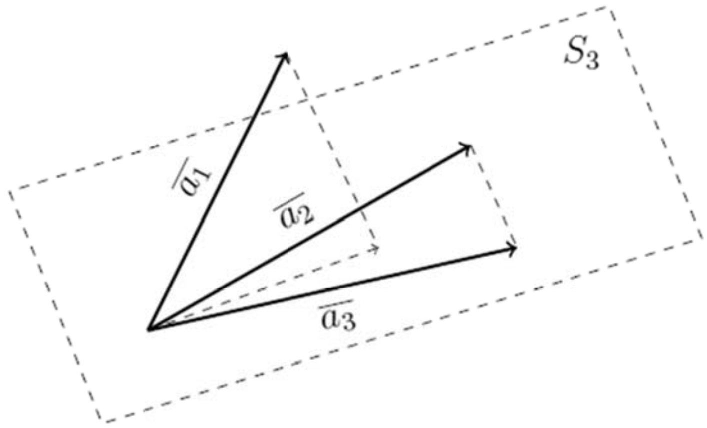


*se **p=1** i due vettori risultano linearmente dipendenti e individuano uno spazio S_1*

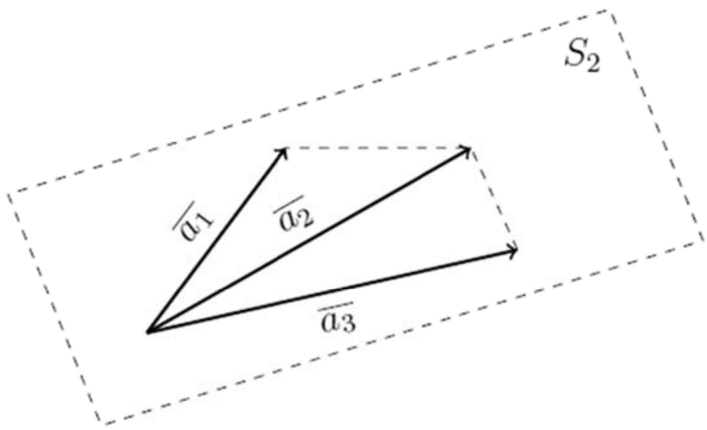


Esempio: Dati tre vettori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ e $\bar{a}_3$ tutti $\neq 0$

*se **p=3** i tre vettori risultano linearmente indipendenti e individuano uno spazio S_3*



*se **p=2** i tre vettori risultano linearmente dipendenti e individuano uno spazio **S_2***



*se **p=1** i tre vettori risultano linearmente dipendenti e individuano uno spazio **S_1***

7.2 – <u>Matrici</u>

7.2.1 – <u>Definizioni e tipologie di matrici</u>

*Una matrice è una tabella di numeri reali (elementi) disposti su **m** righe ed **n** colonne*

<7.2.1/1>
$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}} = \boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{m,n})} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m\times n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

<u>*Esempio*</u>*: Matrice*

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{5,3}} = \boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{5,3})} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{5\times 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matrice può essere considerata un ***vettore (colonna) di vettori (riga)***

<7.2.1/2>
$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}}) \\ (\boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}}) \\ (\dots & \dots & \cdots & \cdots) \\ (\boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} \\ \cdots \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \end{pmatrix}$$

Una matrice può essere considerata un ***vettore (riga) di vettori (colonna)***

<7.2.1/3>

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{22}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{a_{m2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{2n}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix} \right) = (\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}} \quad \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}} \quad \cdots \quad \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}})$$

Una matrice risulta ***quadrata*** *se* $\boldsymbol{m = n}$

$$\text{<7.2.1/4>} \qquad \underbrace{\boldsymbol{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Data una matrice quadrata, le due **diagonali** rispettivamente **principale** e **secondaria** sono*

$$\text{<7.2.1/5>} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

*Una **matrice** è detta **nulla**, se i suoi elementi sono tutti nulli*

$$\text{<7.2.1/6>} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\Omega}}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Una **matrice** quadrata è **simmetrica,** se gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale risultano uguali*

$$\text{<7.2.1/7>} \qquad \underbrace{\boldsymbol{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Matrice simmetrica

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{4,4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: Una matrice quadrata nulla risulta simmetrica

*Una **matrice** quadrata è **triangolare superiore**, se gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli*

<7.2.1/8>
$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Matrice triangolare superiore

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{4,4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*Una **matrice** quadrata è **triangolare inferiore**, se gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli*

<7.2.1/9>
$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a_{1n}} & \boldsymbol{a_{2n}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Esempio: Matrice triangolare inferiore

$$\underbrace{A}_{4,4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Una **matrice** quadrata è **diagonale**, se gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli*

<7.2.1/10>

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Esempio: Matrice diagonale

$$\underbrace{A}_{4,4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Una matrice diagonale risulta triangolare superiore, triangolare inferiore e simmetrica

Nota: Una matrice quadrata nulla è diagonale

*Una **matrice** quadrata è **scalare**, se è diagonale, con gli elementi della diagonale principale tutti uguali tra loro*

<7.2.1/10> $$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n,n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{11}} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Matrice scalare

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{4,4}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: Una matrice scalare risulta triangolare superiore, triangolare inferiore e simmetrica

<u>Nota</u>: Una matrice quadrata nulla è scalare

*Una **matrice** quadrata è **unità**, se è scalare, con gli elementi della diagonale principale tutti pari ad* **1**

<7.2.1/11> $$\underbrace{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{n,n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Matrici unità

$$\underbrace{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{3,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{2,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{1,1}} = (1)$$

<u>Nota</u>: Una matrice unità risulta triangolare superiore, triangolare inferiore e simmetrica

7.2.2 - Operazioni su matrici

*La **matrice trasposta** di una matrice si ottiene scambiando tra loro le righe con le colonne e viceversa*

<7.2.2/1>
$$\underbrace{A^T}_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio: Matrice trasposta

$$\underbrace{A}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{A^T}_{4,3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Nota: Se, per una matrice quadrata, risulta

$$\underbrace{A}_{n,n} = \underbrace{A^T}_{n,n}$$

significa che la matrice originaria è una matrice simmetrica

Nota: La trasposizione gode della proprietà involutoria

$$\underbrace{A}_{m,n} = \left(\underbrace{A^T}_{n,m}\right)^T$$

***Somma di matrici** (coerenti, aventi cioè le stesse dimensioni)*

<7.2.2/2>

$$\underbrace{\boldsymbol{C}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} + \underbrace{\boldsymbol{B}}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Somma di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: La somma matriciale è commutativa e gode della proprietà di assorbimento della matrice nulla coerente

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} + \underbrace{\boldsymbol{B}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{B}}_{m,n} + \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} \quad , \quad \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{\Omega}}_{m,n} + \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n}$$

<u>Prodotto di matrici</u> (<u>righe x colonne</u>) *(coerenza = numero delle colonne della prima matrice = numero delle righe della seconda matrice)*

<7.2.2/3>

$$\underbrace{\boldsymbol{C}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,s} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{s,n} = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{s} a_{1r}b_{r1} & \sum_{r=1}^{s} a_{1r}b_{r2} & \dots & \sum_{r=1}^{s} a_{1r}b_{rn} \\ \sum_{r=1}^{s} a_{2r}b_{r1} & \sum_{r=1}^{s} a_{2r}b_{r2} & \dots & \sum_{r=1}^{s} a_{2r}b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r=1}^{s} a_{mr}b_{r1} & \sum_{r=1}^{s} a_{mr}b_{r2} & \dots & \sum_{r=1}^{s} a_{mr}b_{rn} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: Prodotto di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: Altri possibili prodotti di matrici (con le relative coerenze delle dimensioni delle due matrici):

*prodotto **righe x righe***

*prodotto **colonne x righe***

*prodotto **colonne x colonne***

<u>Nota</u>: Il prodotto matriciale non è commutativo per:

(a) non coerenza delle dimensioni,
(b) diversità delle dimensioni,
(c) diversità degli elementi della matrice risultato

<u>Esempio</u> (a):

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,3} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{3,4} = \underbrace{\boldsymbol{C}}_{2,4} \quad , \qquad \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{B}}_{3,4} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,3}}_{\textbf{\textit{no coerenza}}}$$

<u>Esempio</u> (b):

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,3} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{3,2} = \underbrace{\boldsymbol{C}}_{2,2} \ , \quad \underbrace{\boldsymbol{B}}_{3,2} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,3} = \underbrace{\boldsymbol{D}}_{3,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 14 & 15 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u> (c):

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,2} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{2,2} = \underbrace{\boldsymbol{C}}_{2,2} \;, \quad \underbrace{\boldsymbol{B}}_{2,2} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{2,2} = \underbrace{\boldsymbol{D}}_{2,2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: Il prodotto matriciale è commutativo, se una delle due matrici è una coerente matrice unità

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} \cdot \underbrace{\boldsymbol{I}}_{n,n} = \underbrace{\boldsymbol{I}}_{m,m} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n} = \underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,n}$$

<u>Nota</u>: Il prodotto matriciale inverte l'ordine per trasposizione

$$\underbrace{(\underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,s} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{s,n})}_{\underbrace{\boldsymbol{C}}_{m,n}}{}^{\boldsymbol{T}} = \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{B^T}}_{n,s} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A^T}}_{s,m}}_{\underbrace{\boldsymbol{C^T}}_{n,m}} \;, \quad \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{A}}_{m,s} \cdot \underbrace{\boldsymbol{B}}_{s,n}}_{\underbrace{\boldsymbol{C}}_{m,n}} = (\underbrace{\underbrace{\boldsymbol{B^T}}_{n,s} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A^T}}_{s,m}}_{\underbrace{\boldsymbol{C^T}}_{n,m}})^{\boldsymbol{T}}$$

7.2.3 – <u>Determinante di una matrice quadrata</u>

*Il **determinante** è una funzione che associa ad una matrice quadrata un numero reale, detto esso stesso **determinante***

- *Definizione* ***algoritmica*** *di determinante (di* ***Leibnitz****):* *somma degli $n!$ prodotti di n elementi, scelti uno da ogni riga e uno da ogni colonna, con attribuzione del proprio segno o del segno opposto a seconda che la permutazione dei secondi indici sia di classe pari oppure di classe dispari rispetto alla permutazione (base) dei primi indici*

<7.2.3/1>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} = \boldsymbol{det}\left(\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n,n}}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{cl\left(P_k^{(n)}\right)} \prod_{j=1}^{n} a_{jp_{kj}}$$

- *<u>Determinante del secondo ordine</u>*

<7.2.3/2>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{2,2}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{2}} (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{cl}\left(\boldsymbol{P_k^{(2)}}\right)} \boldsymbol{a_{1p_{k1}} a_{2p_{k2}}} =$$

Primi indici	*Secondi indici*	*Classe*
1 2	1 2	0
1 2	2 1	1

$$= (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{a_{11} a_{22}} + (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{a_{12} a_{21}} = \boldsymbol{a_{11} a_{22}} - \boldsymbol{a_{12} a_{21}}$$

<u>Esempio</u>: Determinante del secondo ordine

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{2,2}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

- ***Determinante del terzo ordine***

<7.2.3/3>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{3,3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{cl\left(P_k^{(3)}\right)} a_{1p_{k1}} a_{2p_{k2}} a_{3p_{k3}} =$$

Primi indici	*Secondi indici*	*Classe*
1 2 3	1 2 3	0
1 2 3	1 3 2	1
1 2 3	2 1 3	1
1 2 3	2 3 1	2
1 2 3	3 1 2	2
1 2 3	3 2 1	3

$$= (-1)^0 a_{1p_{11}} a_{2p_{12}} a_{3p_{13}} + (-1)^1 a_{1p_{21}} a_{2p_{22}} a_{3p_{23}} +$$

$$+(-1)^1 a_{1p_{31}} a_{2p_{32}} a_{3p_{33}} + (-1)^2 a_{1p_{41}} a_{2p_{42}} a_{3p_{43}} +$$

$$+(-1)^2 a_{1p_{51}} a_{2p_{52}} a_{3p_{53}} + (-1)^3 a_{1p_{61}} a_{2p_{62}} a_{3p_{63}} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

<u>Esempio</u>: Determinante del terzo ordine

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 +$$

$$+3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 - 2 - 4 + 6 + 12 - 27 = -12$$

Per il calcolo del determinante del terzo ordine, e solo per quello, è possibile utilizzare la cosiddetta ***Regola di Sarrus***

<7.2.3/4>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{3,3} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Esempio: *Determinante del terzo ordine*

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{3,3} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 3 + 6 + 12 - 27 - 2 - 4 = -12$$

Il ***determinante*** *di una* ***matrice*** *quadrata* ***nulla*** *è nullo*

<7.2.3/5>

$$\underbrace{|\boldsymbol{\Omega}|}_{n,n} = \mathbf{0}$$

Il ***determinante*** *di una matrice* ***triangolare*** *(sia superiore che* ***inferiore****) oppure* ***diagonale*** *è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale*

<7.2.3/6>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

<u>*Esempio*</u>*: Determinante di una matrice diagonale*

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$$

Il ***determinante*** *di una matrice* ***scalare*** *è pari alla potenza n-sima dell'elemento costante della diagonale principale*

<7.2.3/7>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} = \prod_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{11}} = \boldsymbol{a_{11}^{n}}$$

<u>*Esempio*</u>*: Determinante di una matrice scalare*

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3^3 = 27$$

Il ***determinante*** *di una matrice* ***unità*** *è pari ad* **1**

<7.2.3/8>

$$\underbrace{|\boldsymbol{I}|}_{\boldsymbol{n,n}} = \mathbf{1}^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$$

<u>*Esempio*</u>*: Determinante di una matrice unità*

$$\underbrace{|\boldsymbol{I}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^3 = 1$$

*Il **determinante** di una matrice quadrata **trasposta** coincide con il determinante della matrice data*

<7.2.3/9>

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} = \underbrace{|\boldsymbol{A^T}|}_{\boldsymbol{n,n}}$$

<u>Esempio</u>: Determinante di una matrice trasposta

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{3,3}}} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\underbrace{|\boldsymbol{A^T}|}_{\boldsymbol{3,3}}} = 5$$

*Un **determinante** risulta **nullo** se gli elementi di una linea (riga o colonna) della matrice sono tutti nulli (infatti ogni termine della somma dello sviluppo del determinante comprende un elemento di tale linea)*

<u>Esempio</u>: Determinante con linea (riga o colonna) nulla

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

*Un **determinante cambia segno** se si scambiano tra loro due linee parallele (due righe oppure due colonne)*

<u>Esempio</u>: Scambio tra prima e terza colonna del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Un ***determinante*** *risulta nullo se due linee parallele (righe oppure colonne) della matrice sono uguali (scambiando le due linee uguali, il determinante dovrebbe al tempo stesso rimanere inalterato e cambiare segno)*

<7.2.3/10> $$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} = -\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} \Rightarrow \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} = \boldsymbol{0}$$

<u>Esempio</u>: Determinante con due colonne uguali

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Se si moltiplica una linea (riga oppure colonna) di una matrice per un numero reale, il ***determinante*** *risulta* ***moltiplicato*** *per tale numero reale, mentre se si moltiplicano tutti gli elementi della matrice per tale numero reale, il determinante risulta moltiplicato per l'n-ma potenza di tale numero*

<7.2.3/11>

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{ka_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{ka_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{ka_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Un **determinante** risulta **nullo** se due linee parallele (righe o colonne) della matrice sono proporzionali (moltiplicando una delle due linee per un opportuno numero reale è possibile ottenere una matrice con due linee parallele uguali, il cui determinante risulta nullo).*

<u>Esempio</u>: Determinante con due colonne proporzionali

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

*Se gli elementi di una linea (riga o colonna) di una matrice sono somme di due addendi, il determinante equivale alla **somma di due determinanti** con gli stessi elementi delle ulteriori linee e con la linea interessata composta rispettivamente dai primi o dai secondi addendi delle somme*

<7.2.3/11>

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{b_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

Se agli elementi di una linea (riga o colonna) di una matrice si aggiungono gli elementi di una linea parallela moltiplicati per un numero reale, il ***determinante non cambia***

<7.2.3/12>

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11} + k a_{1j}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21} + k a_{2j}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1} + k a_{nj}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{1j}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{2j}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{nj}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

operando in questo modo, è possibile modificare una matrice, senza modificarne il relativo determinante.

*<u>Esempio</u>: Metodo di **triangolarizzazione** di **Gauss***

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$2^\wedge riga - 3^\wedge riga \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$1^{\wedge}\,riga - 3^{\wedge}riga(\times 3) \Rightarrow \begin{vmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$2^{\wedge}\,col - 1^{\wedge}col\left(\times\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 \\ 3 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Data una matrice quadrata di ordine ***n****, si definisce* ***minore complementare*** *di un assegnato elemento*

$$\boldsymbol{a_{kj}}\ ,\quad k = 1,2,\dots,n \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$$

il determinante della ***sottomatrice quadrata*** *di ordine* ***n-1****, ottenuta dalla matrice data sopprimendo gli elementi della* ***k-sima riga*** *e della* ***j-sima colonna***

<7.2.3/13>

$$\underbrace{\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{j})}\right|}_{\boldsymbol{n-1,n-1}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \dots & \boldsymbol{a_{1,j-1}} & & \boldsymbol{a_{1,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{1,n}} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{k-1,1}} & \dots & \boldsymbol{a_{k-1,j-1}} & & \boldsymbol{a_{k-1,j-1}} & \dots & \boldsymbol{a_{k-1,n}} \\ & & & & & & \\ \boldsymbol{a_{k+1,1}} & \dots & \boldsymbol{a_{k+1,j-1}} & & \boldsymbol{a_{k+1,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{k+1,n}} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n,1}} & \dots & \boldsymbol{a_{n,j-1}} & & \boldsymbol{a_{n,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$k = 1,2,\dots,n\ , \quad j = 1,2,\dots,n$$

Il ***complemento algebrico*** *relativo al sopracitato elemento è uguale al minore complementare con attribuzione del proprio segno o del segno opposto, a seconda che la somma degli indici dell'elemento risulti pari oppure dispari*

<7.2.3/14>

$$\underbrace{\left|A^{(k,j)}\right|}_{n-1,n-1} = (-1)^{k+j} \underbrace{\left|\widehat{A}^{(k,j)}\right|}_{n-1,n-1} \quad , \quad \begin{cases} k = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

<u>Primo Teorema di Laplace</u> *= il determinante di una matrice quadrata è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici*

<7.2.3/15>

$$\underbrace{|A|}_{n,n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \underbrace{\left|A^{(k,j)}\right|}_{n-1,n-1} \ , \ k = 1,2,\dots,n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \underbrace{\left|A^{(k,j)}\right|}_{n-1,n-1} \ , \ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

<u>Esempi</u>: Primo Teorema di Laplace

- *sviluppo secondo la prima riga*

$$\underbrace{|A|}_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-5) = 1 + 2 - 15 = -12$$

- *sviluppo secondo la seconda colonna*

$$\underbrace{|A|}_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-8) - 2 \cdot (-5) = 2 - 24 + 10 = -12$$

- *seconda riga – terza riga, prima colonna + seconda colonna, sviluppo secondo la seconda riga*

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{3,3}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12) = -12$$

<u>Secondo Teorema di Laplace</u> *= la somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga oppure colonna) per i complementi algebrici di una linea parallela è uguale a zero*

<7.2.3/16>

$$\boldsymbol{0} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{kj}} \underbrace{\left|\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{h},\boldsymbol{j})}\right|}_{\boldsymbol{n-1,n-1}} \;,\;\; k = 1,2,\dots,n \;\;,\;\; h \neq k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{kj}} \underbrace{\left|\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h})}\right|}_{\boldsymbol{n-1,n-1}} \;,\;\; j = 1,2,\dots,n \;\;,\;\; h \neq j \end{cases}$$

7.2.4 – <u>Caratteristica di una matrice</u>

*Un **minore** di ordine **k** di una matrice (di **m** righe ed **n** colonne) è il determinante della sottomatrice formata con gli elementi appartenenti a **k** righe e **k** colonne della matrice data, essendo*

$$1 \leq k \leq min(m,n)$$

<u>Esempio</u>: Minore di ordine 2 di una matrice

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{5,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \underbrace{\left|\boldsymbol{A}^{[\mathbf{2,4;1,3}]}\right|}_{\mathbf{2,2}} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -22$$

*Il **numero di minori** estraibili da una matrice risulta*

<7.2.4/1>

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{min(m,n)}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

<u>Esempio</u>: Numero dei minori

$$\sum_{k=1}^{min(5,3)} \binom{5}{k}\binom{3}{k} = \underbrace{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}_{15} + \underbrace{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}_{30} + \underbrace{\binom{5}{3}\binom{3}{3}}_{10} = 55$$

*La **caratteristica p_A di una matrice A** è il massimo ordine dei minori non nulli*

<7.2.4/2> $$\boldsymbol{0 \leq p \leq min(m,n)}$$

<u>Esempio</u>: Caratteristica di una matrice

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{3,4}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 6 & 0\\2 & 4 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\3 & 6 & 1\\2 & 4 & 8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 0 & 1\\2 & 6 & 8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\6 & 0 & 1\\4 & 6 & 8\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 0\end{vmatrix} = -9 \ \Rightarrow \ p_A = 2$$

<u>Esempio</u>: Calcolo della caratteristica di una matrice al variare del parametro s

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{3,3} = \begin{pmatrix}s^2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & s\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix}s^2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & s\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}s^2-1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & s-1\end{vmatrix} =$$

$$= (s^2-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & s-1\end{vmatrix} = (s+1)\cdot(s-1)^2$$

$$\begin{cases} s \neq \pm 1 \Rightarrow \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} \neq 0 \Rightarrow p_A = 3 \\ s = -1 \Rightarrow \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = -2 \Rightarrow p_A = 2 \\ s = 1 \Rightarrow \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0\,, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} = 0, |1| = 1 \ \Rightarrow p_A = 1 \end{cases}$$

Dati $\boldsymbol{n}$ vettori di uno spazio $\boldsymbol{S_m}$ aventi rango $\boldsymbol{p}$, la matrice (di $\boldsymbol{m}$ righe ed $\boldsymbol{n}$ colonne), costituita con le componenti dei vettori (colonna), ha caratteristica pari a $\boldsymbol{p}$. Quindi, per conoscere il rango di un insieme di vettori è sufficiente calcolare la caratteristica della matrice corrispondente.

Poiché la ***caratteristica di una matrice*** *non cambia se alla matrice stessa si aggiunge una colonna nulla o tale che sia combinazione lineare delle altre colonne (in caso contrario, la caratteristica aumenta di un'unità), corrispondentemente il* ***rango di un insieme di vettori*** *non cambia se all'insieme stesso si aggiunge il vettore nullo o un vettore che sia combinazione lineare degli altri vettori (in caso contrario, il rango aumenta di un'unità).*

<u>Esempio</u>: Uguaglianza/aumento della caratteristica di una matrice

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; p_A = 2$$

$$\underbrace{\boldsymbol{B}}_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \; p_B = 2$$

$$\underbrace{\boldsymbol{C}}_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \; p_C = 2$$

$$\underbrace{\boldsymbol{D}}_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; p_B = 3$$

<u>Teorema di Kronecker</u> *(noto anche come "**<u>dei minori orlati</u>**")*

Una matrice di ordine qualsiasi ha caratteristica uguale a k se e solo se tutti i minori di ordine k+1 contenenti uno stesso minore o costruiti attorno ("orlando") ad uno stesso minore di ordine k risultano singolari (nulli).

L'importanza del Teorema dei minori orlati risiede nel fatto di dover controllare, ai fini dell'individuazione della caratteristica di una matrice, un minor numero di minori (calcolo di determinanti), rispetto alla definizione generale: non occorre, cioè, controllare che siano singolari tutti i minori di ordine k+1 contenuti in una matrice ma solo quelli che orlano un minore di ordine k. In particolare, tale metodo facilita molto il calcolo di caratteristiche di matrici di ordine maggiore di due o di matrici non quadrate.

Esempio: Calcolare la caratteristica della seguente matrice con il metodo dei minori orlati

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nota immediatamente che la caratteristica è almeno 1. Poichè

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

tale caratteristica è almeno 2. Poiché l'unico minore orlato del minore scelto corrisponde al determinante della matrice data che risulta pari a $18 \neq 0$ *, la caratteristica della matrice risulta pari a 3.*

Esempio: Calcolare la caratteristica della seguente matrice con il metodo dei minori orlati

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto verificato nell'esempio precedente, la matrice data ha caratteristica almeno 3 (basta scegliere lo stesso minore di ordine 2 e orlarlo nel modo indicato). Essendo composta di tre righe, la matrice può avere al massimo caratteristica 3 e quindi la sua caratteristica non può essere che 3.

Supponendo ora di non disporre delle informazioni dell'esempio precedente, applichiamo il metodo di Kronecker iniziando da un minore non nullo di ordine 2, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ricordando che affiché la caratteristica della matrice sia 3 è sufficiente che almeno un minore di ordine 3 sia non nullo, mentre affinché non sia 3 è necessario che tutti i minori di ordine 3 devono essere nulli, consideriamo il minore orlato di ordine 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

quindi la caratteristica della matrice è esattamente 3

<u>Esempio</u>: Calcolare la caratteristica della seguente matrice con il metodo dei minori orlati

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Scegliendo un minore di ordine 2 da orlare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e il conseguente minore orlato

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

si può dedurre che la caratteristica della matrice è almeno 3 (operando in questo modo, abbiamo implicitamente controllato tutti i minori di ordine 3), mentre se tale minore orlato fosse stato nullo, avremmo dovuto orlare il minore di ordine 2 con un'altra riga e un'altra colonna per formare un diverso minore di ordine 3. Per controllare se la caratteristica della matrice sia 4, si deve orlare il minore di ordine 3, precedentemente considerato

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

e poiché la caratteristica della matrice data può essere al massimo 4, si può affermare che la caratteristica cercata è esattamente 4, senza dover controllare altri minori orlati di ordine 4.

7.2.5 - <u>Matrice inversa</u>

Data una ***matrice quadrata*** *di ordine* ***n***

<7.2.5/1>

$$\underbrace{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*si definisce **matrice aggiunta** una matrice quadrata dello stesso ordine, i cui elementi sono dati dai complementi algebrici (di ordine **n-1**) della matrice data,*

<7.2.5/2>

$$\underbrace{\overline{A}}_{n,n} = \begin{pmatrix} \left|A^{(1,1)}\right| & \left|A^{(1,2)}\right| & \dots & \left|A^{(1,n)}\right| \\ \left|A^{(2,1)}\right| & \left|A^{(2,2)}\right| & \dots & \left|A^{(2,n)}\right| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left|A^{(n,1)}\right| & \left|A^{(n,2)}\right| & \dots & \left|A^{(n,n)}\right| \end{pmatrix}$$

*Data una **matrice quadrata** di ordine n **non singolare** (ossia caratterizzata dal determinante diverso da zero), si definisce **matrice inversa** una matrice quadrata dello stesso ordine, i cui elementi sono dati dagli elementi della matrice trasposta della matrice aggiunta, moltiplicati per il reciproco del determinante della matrice data*

<7.2.5/3>

$$\underbrace{A^{-1}}_{n,n} = \frac{1}{\underbrace{|A|}_{n,n}} \cdot \underbrace{\overline{A}^{T}}_{n,n} = \begin{pmatrix} \frac{\left|A^{(1,1)}\right|}{|A|} & \frac{\left|A^{(2,1)}\right|}{|A|} & \dots & \frac{\left|A^{(n,1)}\right|}{|A|} \\ \frac{\left|A^{(1,2)}\right|}{|A|} & \frac{\left|A^{(2,2)}\right|}{|A|} & \dots & \frac{\left|A^{(n,2)}\right|}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\left|A^{(1,n)}\right|}{|A|} & \frac{\left|A^{(2,n)}\right|}{|A|} & \dots & \frac{\left|A^{(n,n)}\right|}{|A|} \end{pmatrix}$$

<u>*Esempio*</u>*: Matrice inversa*

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{3,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\mathbf{3,3}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-12}_{\neq 0}$$

$$\underbrace{\overline{\boldsymbol{A}}}_{\mathbf{3,3},} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}}_{\mathbf{3,3}} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & -8 & 5 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

*Tra una **matrice non singolare** di ordine **n** e la sua **matrice inversa** (anch'essa di ordine **n**) valgono le seguenti relazioni*

<7.2.5/3>
$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n,n}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}}_{\boldsymbol{n,n}} = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}}_{\boldsymbol{n,n}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n,n}} = \underbrace{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{n,n}}$$

La prima relazione $\boldsymbol{AA^{-1}=I}$ *può essere verificata, ricordando la definizione di **prodotto matriciale** (righe per colonne), nonché i due **Teoremi di Laplace.** Ovviamente, operando in modo analogo può essere verificata la seconda relazione* $\boldsymbol{A^{-1}A=I}$*, a conferma della commutatività della relazione precedente.*

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n,n}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A^{-1}}}_{\boldsymbol{n,n}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}}} \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{n} a_{1r}a_{r1}^{-1} & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}a_{r2}^{-1} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}a_{rn}^{-1} \\ \sum_{r=1}^{n} a_{2r}a_{r1}^{-1} & \sum_{r=1}^{n} a_{2r}a_{r2}^{-1} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{2r}a_{rn}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r=1}^{n} a_{nr}a_{r1}^{-1} & \sum_{r=1}^{n} a_{nr}a_{r2}^{-1} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{nr}a_{rn}^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}}} \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(1,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(2,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(n,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(1,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(2,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(n,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r=1}^{n} a_{nr}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(1,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \sum_{r=1}^{n} a_{nr}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(2,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} & \dots & \sum_{r=1}^{n} a_{nr}\frac{\left|\boldsymbol{A^{(n,r)}}\right|}{|\boldsymbol{A}|} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}}} = \begin{pmatrix} \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{n,n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{|\boldsymbol{I}|}_{\boldsymbol{n,n}}$$

Esempio: Prodotto tra una matrice e la sua inversa

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{3,3}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A^{-1}}}_{\mathbf{3,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{|\boldsymbol{I}|}_{\mathbf{3,3}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{A^{-1}}}_{\mathbf{3,3}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{3,3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{|\boldsymbol{I}|}_{\mathbf{3,3}}$$

7.3 – Sistemi di equazioni lineari

7.3.1 – Compatibilità di un sistema di equazioni lineari

Un sistema di $\boldsymbol{m}$ *equazioni lineari in* $\boldsymbol{n}$ *incognite*

<7.3.1/1>
$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m} \end{cases}$$

può essere scritto nella forma matriciale equivalente

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<7.3.1/2>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}a_{12}} & \ldots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}a_{22}} & \ldots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{m1}a_{m2}} & \ldots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}}_{\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}}_{\underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{n,1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}}_{\underbrace{\overline{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{m,1}}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}} \cdot \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{n,1}} = \begin{cases} \underbrace{\overline{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{m,1}} \left(\neq \underbrace{\overline{\boldsymbol{0}}}_{\boldsymbol{m,1}} \right) & \textit{sistema lineare non omogeneo} \\ \underbrace{\overline{\boldsymbol{0}}}_{\boldsymbol{m,1}} & \textit{sistema lineare omogeneo} \end{cases}$$

Matrice dei coefficienti delle incognite = matrice incompleta *del sistema*

<7.3.1/3>

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m,n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}a_{12}} & \ldots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}a_{22}} & \ldots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{m1}a_{m2}} & \ldots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Matrice dei coefficienti delle incognite e dei termini noti = matrice completa *del sistema, ottenuta orlando a destra la matrice incompleta con i termini noti del sistema*

<7.3.1/4>
$$\underbrace{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{m,n+1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11} a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21} a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} & \boldsymbol{b_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{m1} a_{m2}} & \dots & \boldsymbol{a_{mn}} & \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di caratteristica di una matrice risulta

$$\begin{cases} 0 \le p_A \le min(m,n) \\ 0 \le p_B \le min(m,n+1) \\ p_A \le p_B \le p_A + 1 \end{cases} \Rightarrow \ 0 \le p_A \le \begin{cases} min(m,n) \\ p_B \le \begin{cases} min(m,n+1) \\ p_A + 1 \end{cases} \end{cases}$$

da cui, eliminando le condizioni superflue, si ottiene

<7.3.1/5>
$$\boldsymbol{0 \le p_A \le \begin{cases} n \\ p_B \le min(m, p_A + 1) \end{cases}}$$

Un sistema di equazioni lineari risulta ***compatibile****, se ammette almeno una soluzione e in particolare risulta*

- ***determinato****, se ammette una sola soluzione*
- ***indeterminato****, se ammette infinite soluzioni*

Un sistema di equazioni lineari risulta invece ***incompatibile****, se non ammette alcuna soluzione.*

Un sistema ***omogeneo*** *è sempre compatibile, poichè ammette la soluzione banale, corrispondente al vettore nullo e in particolare*

- *se il sistema è* ***determinato****, tale* ***soluzione nulla*** *è unica*

- *se il sistema è **indeterminato**, la soluzione nulla non è unica, in quanto il sistema ammette infinite altre soluzioni (**autosoluzioni** o soluzioni proprie)*

<u>Teorema di Rouchè-Capelli</u>

*Condizione necessaria e sufficiente (CNeS) affinchè un sistema di **m** equazioni lineari in **n** incognite sia compatibile è che risulti*

<7.3.1/6>
$$\boldsymbol{p_A = p_B \ \ (= p)}$$

- *se* $\boldsymbol{p = n}$ *il sistema ammette una sola soluzione*
- *se* $\boldsymbol{p < n}$ *il sistema ammette* $\infty^{\boldsymbol{n-p}}$ *soluzioni*

<u>Teorema di Cramer-Leibnitz</u>

CNeS affinchè un sistema di $\boldsymbol{n}$ *equazioni lineari in* $\boldsymbol{n}$ *incognite sia compatibile e determinato, è che risulti*

<7.3.1/6>
$$\boldsymbol{\underbrace{|A|}_{n,n} \neq 0}$$

Poiché

$$\left.\begin{matrix} m = n \\ \underbrace{|A|}_{n,n} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ p_A = n \ \ (= m)$$

segue

$$0 \leq p_A \leq \begin{cases} p_A \\ p_B \leq \underbrace{min(p_A, p_A + 1)}_{p_A} \end{cases} \Rightarrow \ 0 \leq p_A \leq p_B \leq p_A \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p_A = p_B (= p) = n = m}$$

CNeS affinchè un sistema omogeneo di $\boldsymbol{n}$ *equazioni lineari in* $\boldsymbol{n}$ *incognite ammetta autosoluzioni è che risulti*

<7.3.1/7> $$|\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}| = \boldsymbol{0}$$

Accertamento della compatibilità (e della determinatezza) di sistemi di equazioni lineari

Sistema omogeneo*: sempre compatibile*

<7.3.1/8> $$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} \cdot \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{1}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{0}}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{1}}$$

Calcolo di $\boldsymbol{p}$ $(= \boldsymbol{p_A} = \boldsymbol{p_B})$

- *se* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}$ *il sistema risulta determinato e ammette la* ***sola soluzione nulla***
- *se* $\boldsymbol{p} < n$ *il sistema risulta indeterminato e ammette la* ***soluzione nulla e*** $\infty^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}}$ ***autosoluzioni***

Sistema non omogeneo*: compatibile oppure incompatibile*

<7.3.1/9> $$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} \cdot \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{1}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{1}} \quad (\neq \underbrace{\overline{\boldsymbol{0}}}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{1}})$$

Calcolo di $\boldsymbol{p_A}$

- *se* $\boldsymbol{p_A} = \boldsymbol{m}$ *il sistema risulta normale e quindi compatibile*

$$0 \le p_A \le \begin{cases} n \\ p_B \le \underbrace{min(p_A, p_A + 1)}_{p_A} \end{cases} \Rightarrow \ 0 \le p_A \le p_B \le p_A \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p_A = p_B (= p)} = \begin{cases} \boldsymbol{\le n} \\ \boldsymbol{= m} \end{cases}$$

se $\boldsymbol{p = n}$ *il sistema risulta determinate e ammette una* ***sola soluzione***

se $\boldsymbol{p < n}$ *il sistema risulta indeterminato e ammette* $\infty^{\boldsymbol{n-p}}$ ***soluzioni***

se $\boldsymbol{p_A < m}$ *il sistema risulta non normale e comporta il calcolo di* $\boldsymbol{p_B}$

se $\boldsymbol{p_B = p_A}$ *il sistema risulta compatibile, ammette* ***una*** *oppure* ***infinite soluzioni***

se $\boldsymbol{p = n}$ *il sistema risulta determinato, ammette* ***una sola soluzione***

se $\boldsymbol{p < n}$ *il sistema risulta indeterminato e ammette* $\infty^{\boldsymbol{n-p}}$ ***soluzioni***

se $\boldsymbol{p_B = p_A + 1} \ (\neq \boldsymbol{p_A})$ *il sistema risulta incompatibile e* ***non*** *ammette* ***soluzioni***

7.3.2 – Risoluzione di un sistema di equazioni lineari

Dopo l'accertamento della compatibilità di un sistema, si conosce la caratteristica $\boldsymbol{p} \ (= \boldsymbol{p_A} = \boldsymbol{p_B})$ *e il minore di ordine* $\boldsymbol{p}$ *della matrice* $\boldsymbol{A}$ *diverso da zero*

- *se* $\boldsymbol{p < n}$ *si portano al secondo membro delle equazioni i termini relativi a quelle incognite i cui coefficienti non* *compaiono nel minore di ordine $\boldsymbol{p}$ diverso da zero: a tali incognite vanno attribuiti valori (reali) arbitrari.*

- *se $\boldsymbol{p < m}$ si considera il sistema (base), trascurando le equazioni, i cui coefficienti non compaiono nel minore di ordine p diverso da zero: le soluzioni relative alle p equazioni considerate varranno anche per le $(\boldsymbol{m - p})$ equazioni trascurate.*

Operando in questo modo si ottiene un ***sistema,*** *di $\boldsymbol{p}$ equazioni in $\boldsymbol{p}$ incognite,* ***compatibile e determinato*** *(secondo il Teorema di Leibnitz-Cramer)*

<7.3.2/1>

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{p,p}} \cdot \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{p,1}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{p,1}} \quad , \quad \underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{p,p}} \neq \boldsymbol{0}$$

esso coincide con il sistema iniziale solo se $\boldsymbol{p_A = p_B = m = n}$.

*Tale sistema (**base**) è quello da risolvere (solo se necessario: considerando che, se il sistema è omogeneo con $\boldsymbol{p = n}$, esisterà la sola soluzione nulla, per la quale non sono necessari calcoli).*

Comunque, a prescindere dal precedente caso banale, poiché la ***matrice del sistema è non singolare****, esiste la sua matrice inversa ed è possibile scrivere in forma matriciale la formula risolvente del sistema di equazioni lineari*

<7.3.2/2>

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{p,p} \cdot \underbrace{A}_{p,p}}_{\underbrace{I}_{p,p}} \cdot \underbrace{\bar{x}}_{p,1}}_{\underbrace{\bar{x}}_{p,1}} = \underbrace{A^{-1}}_{p,p} \cdot \underbrace{\bar{b}}_{p,1}$$

Ricordando le definizioni di ***prodotto matriciale*** *(righe per colonne) e di matrice inversa di una matrice quadrata non singolare, risulta*

<7.3.2/3>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A^{(1,1)}|}{|A|} & \frac{|A^{(2,1)}|}{|A|} & \dots & \frac{|A^{(p,1)}|}{|A|} \\ \frac{|A^{(1,2)}|}{|A|} & \frac{|A^{(2,2)}|}{|A|} & \dots & \frac{|A^{(p,2)}|}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{|A^{(1,p)}|}{|A|} & \frac{|A^{(2,p)}|}{|A|} & \dots & \frac{|A^{(n,p)}|}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{p} \frac{|A^{(r,1)}|}{|A|} b_r \\ \sum_{r=1}^{p} \frac{|A^{(r,2)}|}{|A|} b_r \\ \dots \\ \sum_{r=1}^{p} \frac{|A^{(r,p)}|}{|A|} b_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} \sum_{r=1}^{p} b_r |A^{(r,1)}| \\ \frac{1}{|A|} \sum_{r=1}^{p} b_r |A^{(r,2)}| \\ \dots \\ \frac{1}{|A|} \sum_{r=1}^{p} b_r |A^{(r,p)}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \dots \\ \frac{|A_p|}{|A|} \end{pmatrix}$$

La relazione ottenuta consente di ottenere la formula risolvente del sistema di equazioni lineari nella forma della cosiddetta ***Regola di Cramer***

<7.3.2/4a>

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{\underbrace{|\boldsymbol{A_j}|}_{\boldsymbol{p,p}}}{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{p,p}}} = \frac{\mathbf{1}}{\underbrace{|\boldsymbol{A}|}_{\boldsymbol{p,p}}} \sum_{\boldsymbol{r=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{b_r} \underbrace{\left|\boldsymbol{A^{(r,j)}}\right|}_{\boldsymbol{p-1,p-1}}, \quad j = 1,2, \dots, p$$

dove l'espressione al numeratore nella formula rappresenta il determinante della matrice ottenuta dalla matrice del sistema, sostituendo la j-sima colonna con la colonna dei termini noti

<7.3.2/4b>

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1,j-1}} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_{1,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{1p}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2,j-1}} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_{2,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{2p}} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \boldsymbol{a_{p1}} & \boldsymbol{a_{p2}} & \dots & \boldsymbol{a_{p,j-1}} & \boldsymbol{b_p} & \boldsymbol{a_{p,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{pp}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1,j-1}} & \boldsymbol{a_{1j}} & \boldsymbol{a_{1,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{1p}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2,j-1}} & \boldsymbol{a_{2j}} & \boldsymbol{a_{2,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{2p}} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \boldsymbol{a_{p1}} & \boldsymbol{a_{p2}} & \dots & \boldsymbol{a_{p,j-1}} & \boldsymbol{a_{pj}} & \boldsymbol{a_{p,j+1}} & \dots & \boldsymbol{a_{pp}} \end{vmatrix}}$$

$$j = 1,2, \dots, p$$